ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

SESSION DE 1991

DURÉE : 4 heures

Options M et P'

Notations

Toutes les fonctions qui interviennent dans le problème sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

A, a, b, α et m désignent des réels qui vérifient :

$$\begin{cases} m > 0 \\ \alpha < 2 \\ b > a > 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

f, g, p, q, r, s désignent des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

u et φ sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

On appelle zéro de f tout réel x vérifiant $f(x) = 0$.

On définit la notation $f = O(g)$ par :

$$f = O(g) \iff \exists M > 0 : \exists a > 0 : \forall x \geqslant a \quad |f(x)| \leqslant M |g(x)|.$$

On dira que f est une fonction oscillante sur $]a, +\infty[$ s'il existe une suite strictement croissante que l'on notera $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, pour des raisons qui apparaîtront dans la partie IV, telle que :

1. $x_0 > a$ et $\lim_{n \to +\infty} x_{2n} = +\infty$.
2. f s'annule en changeant de signe en tout point x_{2n}.
3. $\forall x > a \quad f(x) = 0 \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad x = x_{2n}$.

Enfin pour toute question du problème qui suit, on appellera « solution convenable » toute suite finie d'affirmations correctement justifiées et très lisiblement écrites. Seules les « solutions convenables » seront notées positivement.

L'objet du problème est d'étudier certaines propriétés de fonctions oscillantes solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ d'équations linéaires du second ordre. Les parties III et IV sont indépendantes.

I

1. On suppose que $\int_1^{+\infty} |f'(t)| \, dt$ converge.

   Si $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de réels supérieurs à 1, étudier la convergence de la série :

   $$\sum_{n \geqslant 1} |f(t_n) - f(t_{n-1})|.$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $y'' + \frac{A}{4x^2} y = 0$ en effectuant simultanément le changement de variable $t = \ln x$ et le changement de fonction $z(t) = \frac{y(x)}{\sqrt{x}}$ [on distinguera les cas $A > 1$; $A = 1$; $A < 1$].

3. *a.* Transformer l'équation différentielle $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$ à l'aide du changement de fonction $z(x) = y(x) \exp\left(\frac{1}{2} \int_1^x p(t) \, dt\right)$. L'équation transformée est du type $z'' + v(x) z = 0$. Donner $v(x)$ en fonction de $p(x)$, $q(x)$ et $p'(x)$.

Tournez la page S.V.P.

b. Appliquer cette transformation à $y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right) y = 0$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On donnera l'équation transformée sous la forme $z'' + \left(1 + \frac{K}{x^2}\right) z = 0$ en précisant la valeur de la constante K.

c. Montrer que si une solution non nulle f de $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annule en $x_0 > 0$, alors f change de signe en x_0.

II

1. (y_1, y_2) désigne une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle : $y'' + r(x)\, y = 0$.

On pose : $W_{(y_1, y_2)}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = (y_1\, y_2' - y_2\, y_1')(x)$.

a. Montrer que $W'_{(y_1, y_2)}(x) = 0$ pour tout $x > 0$.

En déduire qu'il est possible de choisir (y_1, y_2) de sorte que $W_{(y_1, y_2)} = 1$.

On supposera qu'il en est ainsi dans la suite de la question.

b. À l'aide de la méthode de la variation des constantes, montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + r(x)\, y = \varphi(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$y(x) = \lambda\, y_1(x) + \mu\, y_2(x) + \int_1^x \varphi(t) \begin{vmatrix} y_1(t) & y_1(x) \\ y_2(t) & y_2(x) \end{vmatrix} dt$$

avec $W_{(y_1, y_2)} = 1$.

c. Utiliser cette expression pour donner les solutions de $y'' + m\, y = \varphi(x)$ $(m \in \mathbb{R}_+^*)$. Puis montrer que :

si f vérifie : $\forall\, x > 0 \quad f''(x) + m f(x) \geqslant 0$

alors : $\forall\, x > 0 \quad f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{\sqrt{m}}\right) \geqslant 0$.

2. *a.* On suppose dans cette question que : $\forall\, x > 0 \quad r(x) > 0$. Effectuer simultanément dans l'équation différentielle $y'' + r(x)\, y = 0$ le changement de variable :

$$t = \int_1^x \sqrt{r(\xi)}\, d\xi + C \quad \text{(C est une constante réelle)}$$

et le changement de fonction $z(t) = \sqrt[4]{r(x)} \cdot y(x)$.

On donnera l'équation transformée sous la forme : $z'' + (1 + u(t))\, z = 0$ avec :

$$u(t) = \frac{K_1\, r'^2(x) - K_2\, r''(x)\, r(x)}{16\, r^3(x)}$$

en précisant la valeur des entiers K_1 et K_2.

b. Quelle équation différentielle obtient-on en transformant de cette façon, en prenant $C = \frac{2\sqrt{A}}{2 - \alpha}$:

$$y'' + \frac{A}{x^\alpha} y = 0 \qquad A > 0 \quad \text{et} \quad \alpha < 2 \,?$$

Avec les notations précédentes vérifier que dans ce cas $\int_1^{+\infty} |u(t)|\, dt$ converge.

A SUIVRE

III

u désigne une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. *a.* On suppose que : $\exists M > 0 : \forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant M + \int_a^x |f(t)|\,|u(t)|\,dt$ (1)

Montrer que : $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant M \exp\left(\int_a^x |u(t)|\,dt\right)$.

[On pourra considérer $g(x) = M + \int_a^x |f(t)|\,|u(t)|\,dt$ et majorer $\frac{g'}{g}$ à l'aide de (1).]

b. On suppose de plus que $\int_a^{+\infty} |u(t)|\,dt$ converge. Montrer que si l'inégalité (1) est vraie pour tout réel $b > a$, (M ne dépendant pas de b), alors f est bornée sur $[a, +\infty[$.

c. Si f est une fonction bornée sur $[a, +\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} |u(t)|\,dt$ converge, montrer que :

si $\exists M > 0, \forall x \in [a, +\infty[\quad |f(x)| \leqslant M + \int_x^{+\infty} |f(t)|\,|u(t)|\,dt$.

alors $\forall x \in [a, +\infty[\quad |f(x)| \leqslant M \exp \int_x^{+\infty} |u(t)|\,dt$.

[Justifier la convergence de chaque intégrale impropre.]

2. Prouver que les résultats de III.1. peuvent être étendus au cas où $M = 0$.

3. On suppose dans cette question que $\int_1^{+\infty} |u(t)|\,dt$ converge. La fonction f désigne une solution de l'équation différentielle $z'' + (1 + u(t))\,z = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

a. Montrer que f est bornée sur $[1, +\infty[$.

[On pourra utiliser II.1.*b.* avec $\varphi(t) = -u(t)f(t)$.]

b. En déduire que pour tout $x > 0$: $g(x) = \int_1^{+\infty} f(t)\,u(t)\sin(x - t)\,dt$

est une intégrale absolument convergente et que : $\exists (\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2 : g(x) = \lambda_0 \cos x + \mu_0 \sin x$.

c. En utilisant II.1.*b.*, montrer que :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad f(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t + O\left(\int_t^{+\infty} |u(x)|\,dx\right).$$

d. Montrer que : $\lambda = \mu = 0 \implies \forall x > 0 \quad f(x) = 0$.

4. En déduire que les solutions de $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0$

vérifient : $$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}[\lambda \cos x + \mu \sin x] + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$$

5. Si $\alpha < 2$ et $A > 0$, montrer que les solutions de $y'' + \frac{A}{x^\alpha}y = 0$

vérifient : $$y(x) = x^{\frac{\alpha}{4}}\left[\lambda \cos B\, x^{1-\frac{\alpha}{2}} + \mu \sin B\, x^{1-\frac{\alpha}{2}}\right] + O\left(x^{\frac{3\alpha}{4}-1}\right).$$ (Préciser la constante B.)

Qu'obtient-on en particulier dans le cas $\alpha = A = 1$?

← lire $1 - \frac{\alpha}{2}$

← lire $\frac{3\alpha}{4} - 1$

Tournez la page S.V.P.

IV

Dans toute cette partie on suppose que la fonction r vérifie :

$$\exists (m_1, m_2) \in \mathbb{R}; \qquad \forall x \in]1, +\infty[; \qquad m_2 \geqslant r(x) \geqslant m_1 > 0.$$

f désigne une solution non nulle de $y'' + r(x)\, y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que f s'annule en changeant de signe en au moins un point de l'intervalle :

$$\left[b, b + \frac{\pi}{\sqrt{m_1}}\right] \quad \text{pour tout } b > 1.$$

[On pourra utiliser la fonction g définie par $g(x) = \sin \sqrt{m_1}\,(x - b)$ puis raisonner par l'absurde en construisant le tableau de variation de $W_{(f,g)}$; voir II.1.]

2. Si α et β sont deux zéros successifs de f, prouver à l'aide d'une solution g bien choisie de $y'' + m_2\, y = 0$ que $\beta - \alpha \geqslant \dfrac{\pi}{\sqrt{m_2}}$.

3. En déduire que f est oscillante sur $]1, +\infty[$.

4. *Dans toute la suite du problème* on suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} r(x) = R > 0$. On sait alors que f est oscillante sur $]1, +\infty[$. Soit $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite strictement croissante des zéros de f sur $]1, +\infty[$.

En détaillant avec soin la solution proposée, prouver que :

$$\lim_{n \to +\infty} (x_{2n+2} - x_{2n}) = \frac{\pi}{\sqrt{R}}.$$

5. Déduire de ce qui précède que toute solution non nulle de $y'' + \dfrac{A}{x^\alpha}\, y = 0$ $(A > 0$ et $\alpha < 2)$ est oscillante. [Justifier avec précision le choix $\alpha < 2$.]

6. On note $M_n = \sup\limits_{x_{2n} \leqslant t \leqslant x_{2n+2}} |f(t)|$.

   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists ! x_{2n+1} \in]x_{2n}, x_{2n+2}[\; : \; |f(x_{2n+1})| = M_n$.
   [Justifier avec précision l'unicité de x_{2n+1}]

   b. Si r est une fonction monotone sur $]1, +\infty[$, prouver que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite monotone. Préciser son sens de variation par rapport à celui de r.

   [On pourra intégrer la fonction $2 f' f'' + 2 r f' f$.]

   c. Si r est une fonction telle que $\int_1^{+\infty} |r'(t)|\, dt$ converge, montrer que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $M > 0$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} |f'(x_{2n})| = M\sqrt{R}$ [On pourra utiliser I.1.]

FIN